

数学的な表現力を高め、学習内容の定着を図る指導の工夫

－反芻^{はんすう}的学习を取り入れた授業を通して－

長期研究員 五十嵐 健博

I 研究の趣旨

改訂された高等学校学習指導要領において、数学的な思考力・表現力の重要性が述べられ、それらを育成するための具体的な指導や学習活動の必要性が示された。

また、平成22年度全国学力・学習状況調査結果では、本県の数学科における学力の不足が明らかとなった。特に、事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明する力が不足していることが課題として挙げられた。

日々の授業では、学習に対し受動的な生徒が多いことを実感させられる。与えられた課題について、解法を理解するのではなく、分からない問題は模範解答を写すことに終始してしまう。この一因は、筆者自身、日々の指導法にあると考える。すなわち、教え込みが主体の授業により、生徒は学習に対して受け身となり、生徒自身の数学的な思考の場が制限されてしまう。その結果、生徒は学習内容の構造化を図ることができず、課題を自分なりに考察する力や、考察した結果について表現する力を身に付けることができない。したがって、学習内容の定着も図れない。

学習内容をきちんと理解・習得するためには、今までの学習内容との関連を、生徒が主体的に考察し、知識の構造化を図る必要がある。

更に、生徒の意識調査からは、公式や決まった考え方をあてはめるようなことは得意とするものの、問題の状況を読み取り、それに応じて解法を考えるような問題は苦手と感じていることが明らかとなった。学習したそれぞれの項目について、十分な理解が得られていないことが要因と考えられる。

一つ一つの学習項目について、理由や成り立ちなどについても十分理解させることが大切であり、この点を踏まえた学習指導を行うことが必要である。

以上の点から、学習内容を確かな学力として定着させるための知識の習得方法と、習得した知識や数学的な考え方を表現する力の育成が課題として浮かび上がってくる。そして、これらの課題は、それぞれ独立したものではなく、密接に関連し合ったものであると考える。学習した内容を確かな学力として定着させるためには、学習内容の構造化を促すような、表現活動を取り入れた指導法を具体化する必要があると考え、本主題を設定した。

II 研究の概要

1 研究仮説

表現する活動を通して学習内容の理解を深める方法として、表現体系における表現様式の変換※を活用する考え方（中原 1995）がある。この理論をもとに、表現力を高める具体的な指導法を考察し、以下のような研究仮説を立てた。

学習内容のまとめにおいて、表現体系における表現様式の変換を活用することで数学的な表現力を高めれば、学習内容の構造化が促進され定着が図られるであろう。

※ 表現体系における表現様式の変換

数学における表現の手段は、日常使用している言語のほかに立体模型や略図、記号を用いるなど様々な方法が考えられる。中原によれば、そうした個々の具体的な表現方法を、図による表現や記号による表現などのように分類して考えた場合に、それらの類型を表現様式と呼ぶ。更に、表現様式の相互関係を体系的にとらえたものを表現体系という。

数学教育の表現体系には様々なものがあるが、中原の表現体系では、数学の表現方法を次の五つの表現様式に分類している。

現実的表現：実物による表現（具体物や実物による実験を

含む)

操作的表現：人工的、半具体的教具等で動的操作を伴った表現

図的表現：図や絵、グラフ等による静的な表現

言語的表現：日常言語を用いた表現（日常語文法に従う）

記号的表現：数字、文字、演算記号など数学的記号を用いた表現（数学語文法に従う）

図1は、これらの表現様式を用いた表現体系を図示したものである。図において上位の表現様式ほど抽象度が高く、数学では抽象度が最も高い記号的表現を目標とする。思考の過程や結果を様々な方法を用いて表現し、目標に達するまでに他の表現様式間、あるいは同じ表現様式の中での変換を活用することで理解を深めることができる（図中の矢印は表現様式間の変換を表す）。

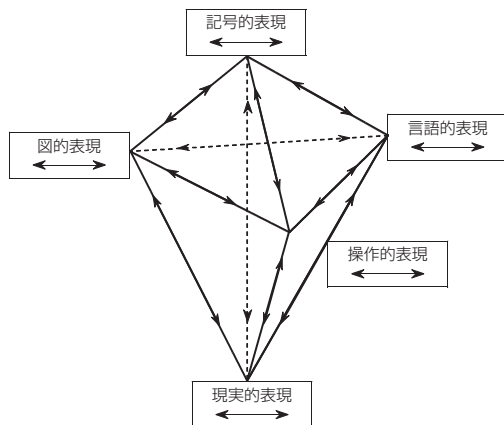


図1 数学教育における表現体系

更に、中原は数学の授業を次の四つの過程に分類している（『算数・数学教育における 構成的アプローチの研究』中原忠男著 1995年 聖文社）。

- (i)意識化：問題を意識化し、解決へ向けて見通しを立てる段階
- (ii)操作化：解決をめざした操作的活動を行う段階
- (iii)反省化：活動を振り返って数学的抽象化、一般化を行う段階
- (iv)協定化：構成した知識を整理し、今までの知識との整合性等を検討し、知識を協定する段階

本研究では中原の言う四つの授業過程の中で、協定化に焦点をあて研究を行った。

2 研究内容

- (1) 生徒の主体的な学習活動を促し、知識の構造化を図り、学習内容の定着をめざす

定義や定理、公式等をただ暗記するというような表面的な知識の習得だけでは、今まで解いたことがないような問題について考察することは困難である。

また、問題が解けても説明ができないとか、なぜそうなるのかは分からないなどの状況を解消するためには、学習項目が理解を伴った知識として習得されなければならない。新たな学習内容を知識として習得する際に、数学的な意味や成り立ちなども理解しなければ、学習内容の構造化を図ることはできない。知識の構造化を図るためには、新たな知識と生徒自身が習得してきた知識との関連付けを図りながら、新たな知識の位置付けが行われなければならない。そのためには、各学習項目について、数学的な意味を理解する必要がある。

更に、既習事項についての理解の仕方や程度は、個々の生徒によって異なるものである。したがって、知識の構造化は生徒自身の知識構造に合った形で行われなければならない。それには、教え込まれるだけの受動的な学習ではなく、主体的な学習活動が不可欠である。主体的な学習を通して、表面的な知識の習得ではなく、意味を理解することを意識した学習へと移行させ、知識の構造化を促進し、確かな学力の定着を図る。

(2) 表現する活動を取り入れた学習により表現力を高めるとともに、学習内容の理解を深める

自分が考えた解法を説明できないことは、数学的な表現力が不足していることにも起因している。表現する活動を学習指導に取り入れることで、表現力の向上を図る。更に、表現することによって思考し、その思考した結果を表現するというように思考と表現する活動は密接な関係がある。表現する活動を通して、学習内容について理解の深化を図る。

Ⅲ 研究の実際

1 研究対象

研究協力校A校 高等学校2学年 40名

单元名 「指数関数・対数関数」

2 学習内容の構造化を促進し、学力の定着を図る指導法

- (1) 生徒の主体的な学習活動を取り入れた指導法

授業の中に、振り返り学習を設定し、知識の再構成を行う場として位置付ける。ここで取り上げる振り返り学習とは、授業で取り上げた定義や定理等に関する数学的な知識について、生徒自身が主体となって再考し、理解を深めることを指す。一度、知識として取り入れた学習項目を、反芻するかのように自分なりの思考を経て表現（output）する活動である。ここでは、この種の振り返り学習を「反芻的学習」と呼ぶこととする。

この反芻的学習において、生徒は授業で得た知識について、現時点での理解をもとに表現する活動を行う。新たな定義や定理、公式の成り立ちや例題の解法のポイント、既習事項との関連等について数学的に表現する。その際できるだけ自分自身の理解している言葉や記号を用いて主体的に表現する。このことによって、生徒それぞれの知識構造に沿った形で新たな数学的知識が構成され、学力として定着することをねらいとした。

(2) 「反芻的学習」の実践方法

反芻的学習を授業に取り入れる場合、以下のことに注意をして授業を行った。

① 反芻的学習の目的・方法の明確化

授業において、生徒を目的に即した表現活動へ的確に導くために、反芻的学習の対象となる学習項目について、その目的と方法を明確にした。

② 生徒に反芻的学習を認識させた授業を行う

授業の中で反芻的学習を行う学習項目について、あらかじめ生徒に知らせておく。学習項目についての説明に入る前に、「この部分については後でみんなに説明を書いてもらう」と伝えた。反芻的学習に向けた生徒の心の準備や学習意欲を喚起するとともに、集中力を持続させる効果をねらった。

③ 単元計画の把握

反芻的学習では生徒が新しい項目について学習する際に、既習事項の知識や他の単元との関連について考察する。これらの点と生徒の予想される考え方について十分に準備をし、生徒の状況に応じて、表現活動に必要なキーワードなどを与えられるよう配慮した。

④ 授業計画

授業計画において、どこに反芻的学習を入れるのがよいかを考察した。各学習項目の特性を踏まえた上で、反芻的学習の効果的な配置方法を次の三点に分類して判断した。

ア 授業の終末：生徒によっては練習問題を解くことで、学習項目について理解が深まることも予想されるので、通常はここでよいと考える。

イ 学習項目の区切り：次の学習項目についての学習が、前の学習内容の十分な理解を必要とする場合など。

ウ 例題、定義等を取り上げた直後：微分係数の定義などのように学習内容が非常に複雑で、定着が困難であると考えられる場合。練習問題を演習する前に、生徒に主体的に考察させることで学習項目について確認させる。ただし、授業の最後にもう一度確認する必要がある。

3 反芻的学習における表現様式の変換を活用した具体的な学習指導法

(1) 表現活動を促す取組み

授業で表現様式の変換を活用するにあたり、まず自分の考えを数学的に表現することに慣れさせる必要がある。

授業では、自分の考えを表現する場合に、説明に必要なキーワードを与えた（図2）。

まとめ

① a^0 を、なぜ「1」とするのか？（例） $3^0 = 1$

参考）	3^0	3^1	3^2	3^3	$\dots$
	↓	↓	↓	↓	
	,	3	9	27	,
					$\dots$

キーワード （ ） , （ ）

図2 学習プリントの内容

反芻的学習を重ねる中で生徒は、学習項目の数学的な意味や理由を表現することに、徐々に慣れていったことがワークシートからうかがえた。また、キーワードを与える前に理由を書き始める生徒も多くなった。さらに、言語的表現を用いて説明を終えた生徒には、理解の深化を図るために表現様式の変換を促し、式や図も交えて説明するように指示した。その結果、記号的表現や図的表現で表す生徒が増加

した（図3）。

プリントNo	学習内容	表現様式				生徒数
		言語的表現	図的表現	記号的表現	空欄	
1	0及び負の指数の定義	34	0	4	3	38
3	有理数の指数の定義	33	5	16	1	35
4	指数関数のグラフの概形	33	3	5	3	37
5	累乗で表された数の大小比較	32	4	13	2	34

* プリントNo2は反芻的学習の内容を含まないため除く
（重複（複数の表現様式を使用している生徒）を含む）

図3 反芻的学習における表現様式の変容

(2) 表現活動における習熟度に応じた支援

言語的表現を行い、早めに説明を終えた生徒に対して、「そのことを式を使って表現するとどう表すことができるか」あるいは、図的表現を使用した生徒に対して、「それはどの公式を利用した説明か書き加えてごらん」などのように表現様式の変換を行わせることで理解を深めるようにした（図4）。

また、ワークシートについても、習熟度に応じて表現様式の変換を行わせるような工夫をした。

有理数の指数のまとめ

○ なぜ $5^{\frac{1}{3}}$ を $\sqrt[3]{5}$ とするのか。

キーワード（ 3 乗すると）

例えば、

$\square^{\frac{1}{3}} = 5$
 $\downarrow \sqrt[3]{}$

$(5^{\frac{1}{3}})^3 = 5^1 = 5$
 $\swarrow$

どっちも 3 乗すると 5 になるから

図4 表現様式の変換例

Ⅳ 研究のまとめ

1 成果

- (1) 確認テストの分析及び授業の観察などから、まず生徒の数学的な表現力についての向上が認められた。これは、反芻的学習における表現活動により表現力が向上したことに加えて、定義や定理及び数学的な事象について、その理由を表現しようとする態度が育成されたことによる効果が大いと考えられる。
- (2) 確認テストでは、表現力だけでなく学力に関しても向上が認められた。今回の実践における表現活動が表現力を向上させるためだけでなく、数学の問題を解くことにも効果があったと考えられる。反芻的学習による学習項目の意味の理解が、

学力を身に付けることにも活用されたと考えることができる。

- (3) 学習項目一つ一つについてその理由を説明できる力は、将来的には大学入学試験の二次試験や推薦入学試験、AO入学試験などの各入学試験の面接等においても発揮されると期待することができる。最近では、ほとんどの大学がこのような多様な選抜方法を入学試験に取り入れ、大学側としても、通常の筆記試験だけでは測ることができない学力を重視している。このような学力は、三年次の受験対策としての学習だけでは身に付けることはできず、高等学校三年間を通した取り組みが必要である。高等学校・大学の接続を考えた場合にも有効であると考えられる。

2 今後の課題

- (1) 反芻的学習を行うための時間の確保である。時間を有効に活用し、効果的な反芻的学習を授業の中に取り入れていくことは、実践上非常に重要な点である。事前の教材研究において、指導内容の精選など工夫が必要であると考えられる。
- (2) 生徒の自由な数学的表現を引き出す工夫が必要である。キーワードを与えるという手立ては、数学的な表現をすること自体が困難であった生徒たちへの効果的な支援方法であったことは、授業で実証することができた。しかし、その結果、同じような表現が多くなってしまった。それぞれの生徒が現時点で持っている知識に応じた表現ができれば、知識の構造化は更に促進すると考えられる。多様な表現が可能となるようなキーワードの選定や、キーワードを与えなくても表現できるような指導法の改善が必要である。
- (3) 他の三つの授業過程、すなわち意識化、操作化、反省化においても表現様式の変換を行う活動を取り入れることである。単元や学習項目によっては、これらの過程において表現様式の変換を行うことが、効果的な場合があると考えられる。単元全体及び教科全体の構想を練り上げ、計画的でかつ具体的な指導方法の立案と実践が必要とされる。