

統合的・発展的に考察する力を育成する算数科・数学科授業の在り方（第二年次）

―「系統図」を活用した数学的な見方・考え方の成長を促す学習サイクルの工夫を通して―

田村市立大越小学校 福島県教育センター 長期研究員 佐藤 翔英
大玉村立大玉中学校 福島県教育センター 長期研究員 齋藤 真実
福島県立小野高等学校 福島県教育センター 長期研究員 白石 裕太

○「系統図」について

「『数学的な見方・考え方のつながり』を探究した教材研究」を基に作成しました。

本単元で働かせる数学的な見方・考え方は何か、数学的な見方・考え方を働かせている子供はどのような姿か、働かせている数学的な見方・考え方はこれまでどのように働かせてきた経験があり、これからどのように働かせていくのか、が明記されています。

系統図には、以下の5つが記載されています。

①	見方・考え方	… 働かせる数学的な見方・考え方
②	問題場面・学習内容	… 問題場面・学習内容
③	子供の発言・表現	… 子供の発言・表現
④	つながり	… 数学的な見方・考え方のつながり
⑤	統合的に考察	… 統合的に考察する子供の姿

1. 小学校第3学年「大きい数のしくみ」

小3 A(1) 大きい数のしくみ

帰納	類推	演繹	統合	発展
いくつかの場合を考える	同じように考える	なぜそうなるのか考える	関連性を考える	広げて考える (数/範囲/条件/場面/求めるもの)

見方・考え方 つながり 統合的に考察
問題場面 学習内容 子供の発言・表現

何のまとまりがいくつあるか

入場けんは、全部で何まいありますか。
佐賀県、宮城県、東京都の人口は何人ですか。
二万 十万 百万 千万

1000を23こ集めた数は、何ですか。
34000は、1000を何こ集めた数ですか。
10000より大きい数のならび方を調べましょう。
16000は、どのような数といえるでしょうか。
数直線 一億

あるまとまりが10こ集まったら、位が1つ上がる

□にあてはまる、＝、>、<の記号を書きましょう。
1. 700万□400万
2. 5000□3000+2000
3. 90000-60000□40000
等号 不等号

下の数は、それぞれいくつですか。
1. 25を10倍した数
2. 250を10でわった数
3. 25を10倍した数を、さらに10倍した数
0が1つ付く 0が1つ消える

類推

300+200のときは、3+2で考えたから...
まとまり(単位)
3+2=5
1000をもとにすると、5000は5になる
90000は、一万が9こ分

発展

もとにする数を変えたら...

統合

もとにする数が...
まとまり(単位)
10が25こから、100が25こになる
もとにする数の位が、1つ上がる
100が25こから、1000が25こになる
もとにする数の位が、1つ下がる

類推

10倍の10倍が、100倍だから...
まとまり(単位)
10が25こから、1000が25こになる

位(位取りの原理)

10が5こで、50だったから... 10こ集まったら、次の位になったから...
千の位のとなりが、一万の位になる

繰り上がり(十進法)

1000が10こ集まったら、1つ上の位に繰り上げる
10めもりで一万になるから、1めもりは1000

まとまり(単位)

一万が2こで、二万
三万は、1000が30こ

発展

一億が10こ集まったら...
もっと大きな位はあるのかな...

小1 位(位取りの原理) 一の位、十の位、百の位
小2 位(位取りの原理) 千の位
小4 位(位取りの原理) 億や兆の単位
小4 万進法 4桁ごとに新たな単位

2. 小学校第5学年「図形の角」

小5B(1) 図形の角

帰納

類推

演繹

統合

発展

見方・考え方

つながり

統合的に考察

いくつかの場合を考える

同じように考える

なぜそうなるのか考える

関連性を考える

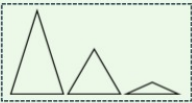
広げて考える
(数/範囲/条件/場面/求めるもの)

問題場面
学習内容

子供の発言・表現

根拠（既習）を明らかにしながら説明する（帰納・演繹・類推）

三角形の3つの角の大きさには、
どのようなきまりがあるか。調べてみましょう。



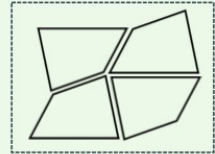
どの三角形も、
3つの角の大きさの和が
 180° になっている

四角形の4つの角の大きさの和は、何度になりますか。

多角形

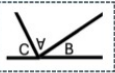
どの四角形も、
4つの角の大きさの和が
 360° になっている

下の四角形は、
すきまなくしきつめられるでしょうか。



他の三角形は...

角



3つの角を1つの点集めると、一直線になる



1つの頂点をつぶしていくと、一直線になる

発展

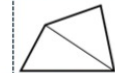
四角形だったら...

演繹

三角形の3つの角の大きさの和が 180° だから...

三角形をつくらば...

分解



$$180 \times 2 = 360$$



$$180 \times 3 - 180 = 360$$



$$180 \times 4 - 360 = 360$$

対角線



$$180 \times 4 - 360 = 360$$

類推

三角形と同じように考えれば...



2つの頂点をつぶしていくと、一直線になる

類推

多角形でも、
同じように考えれば...

発展

多角形だったら...

統合

角が1つの点に集まった図形は...



4つの角が、1つの点に集まる

発展

多角形だったら...

他の図形だったら...

- 小2 辺・頂点に着目
- 小3 角・辺、角の相等関係に着目
- 小4 平行、垂直（位置関係）に着目
- 小5 図形間の関係に着目
- 小6 対称性に着目

小2 角

直角

小3 角

一つの頂点から出る2本の辺がつくる形が、角

小2 分解

正方形や長方形を分けると、直角三角形ができる

小5 分解

求積可能な図形に分解する

小4 角

直角を90等分したうちの1つ分が、 1°

半回転した大きさが 180°

小4 対角線

向かい合う頂点を結んでできる直線

小2 三角形、四角形、正方形、長方形、直角三角形

小3 二等辺三角形、正三角形、円、球

小4 平行四辺形、ひし形、台形

小5 多角形、正多角形

3. 小学校第6学年「拡大図と縮図」

小6B(1) 拡大図と縮図

帰納

類推

演繹

統合

発展

見方・考え方

つながり

統合的に考察

いくつかの場合を考える

同じように考える

なぜそうなるのか考える

関連性を考える

広げて考える
(数/範囲/条件/場面/求めるもの)

問題場面
学習内容

子供の発言・表現

図形間の関係

対応する角の大きさが等しい 対応する辺の長さの比が等しい（合同な図形は、1:1）

下の図形と形が同じに見えるものは、どれですか。

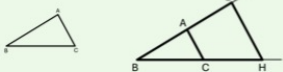
拡大図 縮図



辺の長さが2倍になっている
びったり重なる
大きさが違う

下の三角形ABCを
2倍に拡大した三角形DEFをかきましょう。

下の三角形GBHは、三角形ABCを2倍に拡大した
ものです。三角形GBHのかき方を考えましょう。



類推

合同な図形のときは...

3つの条件が分れば図形が決まったから...

辺

全ての辺の長さが、2倍になっている

対応する辺の長さが、2倍になっている

対応する辺の長さの比が、
どれも1:2になっている

角

角の大きさが全て等しい

対応する角の大きさが全て等しい

小5 辺・角（合同な図形）
対応する辺や、対応する角の大きさは、それぞれ等しい

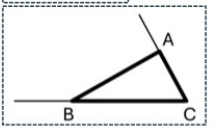
発展

四角形の拡大図だったら...

平行四辺形の拡大図だったら...

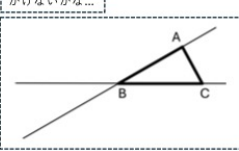
頂点

頂点Cを重ねたら...



位置関係

反対側にも
かけないかな...

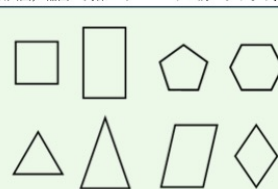


中3 相似の中心

中2 角（対頂角）

中1 辺・角（基本の作図/図形の移動）
辺の長さや角の大きさに着目する

これまでに学習した下のそれぞれの図形について、必ず
拡大図、縮図の関係になっているか調べましょう。



統合

〇〇に着目して、図形を捉え直すと...

図形を弁別すると...

辺

対応する辺の長さの比が...

角

対応する角の大きさが...

小2 辺・頂点に着目

小3 角・辺、角の相等関係に着目

小4 平行、垂直（位置関係）に着目

小5 図形間の関係に着目

小6 対称性に着目

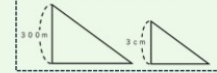
小2 三角形、四角形、正方形、長方形、直角三角形

小3 二等辺三角形、正三角形、円、球

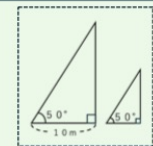
小4 平行四辺形、ひし形、台形

小5 多角形、正多角形

縮尺



はるかさんが校舎から10mはなれたところに
立って、校舎の上はAを見上げている様子を表
したものです。校舎の実際の高さは何mですか。



類推

縮図だと考えれば...

辺

$30000:3=10000:1$ だから...

対応する辺の長さの比が、 $10000:1$

対応する辺の長さの比が、全て等しい

角

対応する角の大きさが、全て等しい

4. 中学校第3学年「2次方程式」

中3A(3) 2次方程式

帰納	類推	演繹	統合	発展
いくつかの場合を考える	同じように考える	なぜそうなるのか考える	関連性を考える	広げて考える (数/範囲/条件/場面/求めるもの)

見方・考え方 つながり 統合的に考察

問題場面 学習内容 子供の発言・表現

2次方程式とその解の意味

統合 既習の解き方に帰着するために目的をもって式を変形し、2次方程式が解ける。(平方根の考え/因数分解/1次方程式)
どんな2次方程式でも、 $(x+p)^2 = q$ の形に直せば解ける。/ どんな2次方程式でも、解の公式を使えば解ける。/ 式の形に着目して、適当な方法で解くことができる。

2次方程式の解き方

統合 文字の種類や次数によって方程式は分類されている。1次方程式や連立方程式と同じように、方程式を成り立たせる文字の値を解という。	類推 因数分解を使った解き方 左辺が因数分解できれば 1次方程式の形に帰して解ける。	統合 平方根の考えによる解き方 いつでも $(x+p)^2 = q$ の形に直せば 平方根の考えを使って解ける。	発展 解の公式を使った解き方 いろいろな2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の形に整理すれば 解の公式で解ける。
方程式 $x(8-x) = 14$ の特徴は？	$(x-1)(x+6) = 0$ 因数分解の考え $A \times B = 0$ ならば $A = 0$ または $B = 0$ $x-1 = 0$ または $x+6 = 0$	$x^2 - 3 = 0$ $(x+2)^2 = 5$ $x^2 + 6x - 1 = 0$ 平方根の考え $x^2 = \bullet$ $\downarrow$ 2乗して $\bullet$ になる数 x は $\bullet$ の平方根 $x = \pm\sqrt{\bullet}$	$3x^2 + 5x + 1 = 0$ 公式の考え $ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 式の形(係数) a が1以外の場合、 b が奇数のときは解の公式が効率的
発展(条件) 次数 式の形 1次方程式の次数が増えている(2次式)=0の形に変形できる方程式を2次方程式という。	式の形 左辺が因数分解できれば、因数分解の考えが使える。 既習の考え(因数分解) 共通因数をくくり出す 乗法公式を使う	式の形(既習の形) $x^2 = \bullet$ の形に直すと $A^2 = 5$ $A = \pm\sqrt{5}$ $x + 2 = \pm\sqrt{5}$ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 平方根の考えを使えば、あとは1次方程式の解き方と同じだ	発展(条件) 式の変と形が率よく動く方法はないか？ 式の形(係数) 式の形に着目して、解き方を使い分けよう。 例) ・ $(2x^2) = 0$ の形にする ・左辺が因数分解できるなら因数分解の解き方 ・ a が1以外なら解の公式 ・ x の係数が偶数なら平方根の考え

方程式を成り立たせる文字の値の組が解

1次方程式とその解の意味

代入する値によって成り立ったり成り立たなかったりする等式
成り立たせる文字の値が解

2次方程式とその解の意味

2つ以上の方程式を組み合わせたもの
組み合わせたもの方程式も成り立たせる文字の値の組が解

1次方程式の意味

(1次式)=0の形に変形できる方程式

発展(文字の種類) **発展(条件)**

2元2元1次方程式の意味

2つの文字をふくむ1次方程式

発展(条件)

1次不等式、2次不等式

3次の乗法公式、二項定理

5. 中学校第3学年「関数 $y = ax^2$ 」

[illegible]

6. 高等学校 数学Ⅰ「2次関数の値の変化：2次関数の最大・最小」

高校 数学 I (3) 2 次関数の値の変化：2 次関数の最大・最小

帰納

いくつかの場合を考える

類推

同じように考える

演繹

なぜそうなるのか考える

統合

関連性を考える

発展

広げて考える
(数/範囲/条件/場面/求めるもの)

見方・考え方

問題場面
学習内容

つながり

子供の発言・表現

統合的に考察

関数の最大値・最小値を求めるには、グラフの頂点や軸に着目しながら、関数の値の変化を調べればいい。

2 次関数の最大値・最小値

次の 2 次関数の最大値・最小値を求めよ。
 $y = (x-2)^2 + 1$, $y = -(x-1)^2 + 5$

帰納

$x = 1$ なら...
 $x = 2$ なら...

変化 (グラフ)

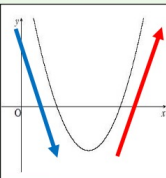
グラフの中で、最も高い点が最大、最も低い点が最小である。

変化 (増減)

2 次関数は頂点を境に、増減が変わる。

変化 (頂点)

頂点がグラフの中で、最も低い (高い) 位置にある。



統合

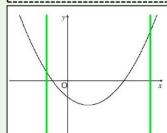
2 次関数は、頂点で最大値または最小値をとり、どちらか一方はない。

定義域に制限がある 2 次関数の最大値・最小値

2 次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ ($-1 \leq x \leq 4$) の最大値・最小値を求めよ。

類推

グラフが下に凸だから、頂点で最小値をとるのはないか。



発展 (定義域)

定義域を変えて、最大値・最小値を考えてみると...

変化 (軸)

軸が、定義域に含まれる場合は、頂点で最小値をとるが、軸が定義域に含まれない場合は、頂点で最小値をとらない。軸が定義域に含まれるかどうかで、最小値が変わる。

類推 (軸 / 最大・最小)

グラフが上に凸なときも、軸が定義域に含まれるかどうかで考えればいい。

2 次関数の利用

長さ 8 m のロープを、コの字に張って長方形の花壇をつくる。花壇の面積が最大となるときの縦の長さを求めよ。また、そのときの面積を求めよ。

帰納

花壇の縦の長さを具体的に考えて、面積が最大となるときを考えると...
 縦が 1 m なら...
 縦が 2 m なら...

関数関係

縦の長さを定めると、面積が定まるから、面積は縦の長さの関数であるといえる。
 縦の長さを x m、面積を y m² とすると...

類推

面積を 2 次関数の式で表せれば、グラフをかいて、最大値を求められそう...

発展 (数 / 条件)

ロープの長さが変わると...
 花壇の形が長方形ではなく、別の形に変わると...

統合

2 つの数量が、関数の関係にあれば、文字を用いて、式で表したり、グラフをかいたりして、問題を解決できる。
 定義域を考える必要がある。

変化 (増減)

中 1 比例・反比例
 比例の場合は $a > 0$ ($a < 0$) のとき、 x の値が増加すると、 y の値は増加 (減少) する。
 反比例の場合は、 x の値が増加すると、 y の値は減少 (増加) する。

中 2 1 次関数
 $a > 0$ ($a < 0$) のとき、 x の値が増加すると、 y の値は増加 (減少) する。
 変化の割合は一定である。

変化 (変域)

中 3 関数 $y = ax^2$
 x の値が増加すると、 y の値は、 $a > 0$ ($a < 0$) のとき、原点を境に、減少 (増加) から増加 (減少) へと変わる。

数学 II 指数関数・対数関数
 底の値 a によって、変化の特徴が異なる。
 $a > 1$ のとき $0 < a < 1$ のときで分けて考える。

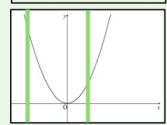
関数関係

小 6 比例
 比例の関係にあるとすることで、数量を調べることができる。

中 2 1 次関数
 2 つの数量の関係を 1 次関数とみなすと、問題を解決したり、予想したりすることができる。

数学 II 微分と積分の考え

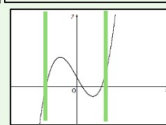
中 3 関数 $y = ax^2$
 変域に $x = 0$ が含まれるかどうかで考える。



数学 II 微分と積分の考え
 増減が変わる点における接線の傾きが 0 である。

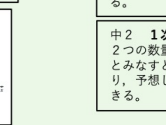
数学 II 微分と積分の考え

数学 II 微分と積分の考え
 定義域に極値が含まれるかどうかで考える。



数学 II 微分と積分の考え

中 3 関数 $y = ax^2$
 変域に $x = 0$ が含まれるかどうかで考える。



数学 II 微分と積分の考え
 2 つの数量の関係を 1 次関数とみなすと、問題を解決したり、予想したりすることができる。

7. 高等学校 数学 I 「2次関数の値の変化：2次関数と2次方程式・2次不等式」

高校 数学Ⅰ (3) 2次関数の値の変化：2次関数と2次方程式・2次不等式

帰納
 いくつかの場合を考える

類推
 同じように考える

演繹
 なぜそうなのか考える

統合
 関連性を考える

発展
 広げて考える
 (数/範囲/条件/場面/求めるもの)

2次方程式の解と2次関数のグラフとの関係

2次関数 $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標を求めよ。

式とグラフとの関係
 2次方程式の解が2個のとき、グラフと x 軸との共有点も2個。
 方程式の解と関係があるかもしれない…。

式とグラフとの関係
 2次方程式の解と、グラフと x 軸との共有点の x 座標が一致している…。

類推
 共有点が2個の場合と同じように、方程式の解と、グラフと x 軸との共有点の x 座標が一致するかどうかを考えればよい。

変化 (表)
 y の値が0となるのは、 x の値が-1と3のときである。

x	...	-1	...	3	...
y	...	0	...	0	...

変化 (グラフ)
 $x = -1, 3$ がグラフと x 軸との共有点の x 座標である。

統合
 方程式の解は、グラフと x 軸との共有点の x 座標と一致する。方程式の解の個数は、グラフと x 軸との共有点の個数と一致する。

2次不等式の解と2次関数のグラフとの関係

2次不等式 $x^2 + 2x - 3 > 0$ の解を求めよ。

類推
 1次不等式の解を求めたときと同じように、まずは方程式の解を求めればよいのではない…。

式とグラフとの関係
 方程式の解は、グラフと x 軸との共有点の x 座標に一致するから…。

変化 (グラフ)
 $x = -4$ や $x = 2$ のときは、グラフが x 軸よりも上側にあるから、 y の値は0より大きい。
 $x = -2$ や $x = 0$ のときは、グラフが x 軸よりも下側にあるから y の値は0より小さい。

変化 (表)
 x の値が-3より小さいか、1より大きいとき、 y の値は0より大きい。 x の値が-3より大きく1より小さいとき、 y の値は0より小さい。

x	...	-3	...	1	...
y	+	0	-	0	+

式とグラフとの関係
 $y > 0$ を満たす範囲。
 $y < 0$ を満たす範囲。

統合
 不等式の解は、グラフと x 軸との位置関係から考えられる。

方程式や不等式の解を求めるには、式とグラフとの関係に着目すればいい。

式とグラフとの関係
 中2 1次関数
 2元1次方程式を成り立たせる x, y の値の組を座標とする点をとると、1次関数のグラフになる。

式とグラフとの関係
 中2 1次関数
 連立方程式の解は、それぞれの方程式のグラフの交点の座標と一致する。
 二つの方程式のグラフが平行なとき、グラフは交わらないから、連立方程式の解はない。

数Ⅱ いろいろな式
 数の範囲を複素数まで拡張すれば、2次方程式は、2次関数のグラフと x 軸との共有点がない場合でも、解をもつ。

数Ⅱ 図形と方程式
 座標平面上の直線は、2元1次方程式で表すことができる。

数Ⅱ 図形と方程式
 円の中心の座標と、半径に着目すれば、円を方程式で表すことができる。

数Ⅱ 図形と方程式
 連立方程式を解けば、円と直線や、2つの円の共有点の座標が求められる。

数Ⅱ 図形と方程式
 軌跡や領域は、方程式や不等式を満たす点の集合である。

数Ⅱ 微分と積分の考え
 3次関数のグラフと x 軸との共有点の x 座標が、3次方程式の解と一致する。